УДК.378.147

К ВОПРОСУ ИЗУЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Лобанова Н.И.,
Муниципальное учреждение дополнительного образования
«Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района», г. Зеленокумск
lobantchik@yandex.ru

Аннотация. В статье показана целесообразность обучения элементам теории дифференциальных уравнений на основе практико-ориентированного подхода в системе дополнительного образования, включающий не только решение задач практико-ориентированного содержания, но и проведение лабораторно-практических работ, организацию экскурсий, применение понятийных карт, рабочих тетрадей, - развивающее понимание школьниками важности математических методов, в частности, метода математического моделирования и реализация математических моделей в виде небольших прикладных программ в Matlab, для решения жизненно важных для человечества проблем, - готовящее их к непосредственному активному участию в будущей профессиональной деятельности.

Ключевые слова: дополнительное образование, обучающиеся, метод математического моделирование, дифференциальные уравнения, компьютерные технологии.

ON THE QUESTION OF STUDYING DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE SYSTEM OF ADDITIONAL EDUCATION

Lobanova N.I.,
Municipal institution of additional education
"Center for extracurricular activities in Zelenokumsk, Sovetskiy district", Zelenokumsk
lobantchik@yandex.ru

Abstract. The article shows the expediency of teaching the elements of the theory of differential equations on the basis of a practice-oriented approach in the system of additional education, including not only the solution of problems of practice-oriented content, but also the carrying out of laboratory and practical works, the organization of excursions, the application of concept maps, workbooks, understanding by students of the importance of mathematical methods, in particular, the method of mathematical modeling and the implementation of mathematical models in the form of small rikladnyh programs in the Matlab, for the solution of vital problems for humanity - prepares them for direct involvement in the future professional activity.

Keywords: additional education, students, method of mathematical modeling, differential equations, computer technologies.

Современному обществу требуются высоко квалифицированные специалисты с исследовательской позицией, способные решать задачи, возникающие из потребностей практики в профессиональной деятельности. Это приводит к необходимости использования в нематематических ситуациях математических методов, одним из которых является метод математического моделирования. Подготовка востребованных обществом профессионалов начинается уже в школе. Исследование проблемы ознакомления старшеклассников с решением дифференциальных уравнений, являющихся моделями практико-ориентированных задач, и методами решения задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, является актуальным в условиях реализации ФГОС.

Методические аспекты изучения теории дифференциальных уравнений (концепция и пути ее реализации, методическая система, прикладная направленность) отражены в исследованиях Р.М. Асланова, Г.И. Баврина, Х.А. Гербекова, В.Д. Львовой, Р.М. Мельникова, Б.А. Найманова, С.В. Плотниковой, Г.Е. Полехиной, А.Г. Савиной, Г. Трелиньски и др., но применительно к студентам вузов.

Изучению дифференциальных уравнений со старшеклассниками посвящена лишь диссертация Г.Е. Полехиной. В ней разработана методика решения уравнений, основанная на единстве и различии методов решения алгебраических, трансцендентных и дифференциальных уравнений.

Существует множество отечественных работ, в которых исследуются проблемы использования информационных технологий в образовании (В.Л. Андреев, В.П. Беспалько, Б.С. Гершунский, А.П. Ершов, И.Г. Захарова, В.Г. Кинелёв, И.Л. Лернер, Б.И. Машбиц, П.И. Образцов, Ю.А. Первин и др.).

В диссертации А.С. Безручко разработана методика обучения решению дифференциальных уравнений, которая сочетает традиционные методы, формы и средства с методами решения дифференциальных уравнений средствами информационных технологий.

Известный ученый-математик А. Д. Мышкис [7] считал, что необходимо учитывать появление и широкое распространение пакетов прикладных математических программ, поэтому центр тяжести в преподавании математики должен быть смещен в сторону понимания смысла рассматриваемых математических объектов, использования текстовых задач прикладной направленности, которые бы ярко иллюстрировали действенность изучаемых математических методов. Задачи алгоритмического характера – производные, интегралы, дифференциальные уравнения должны быть простыми и наглядными. Главное требование, которое надо предъявлять сегодня к обучающимся – умение составить математическую модель, пусть и несложную, и провести ее исследование [6, с. 3].

Разработанная для старшеклассников методика изучения элементов теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования (основанная на практико-ориентированном подходе с использованием метода математического моделирования), соединяющая в себе устоявшиеся приемы учебной деятельности с использованием рабочих тетрадей, понятийных карт, лабораторно-практических занятий и экскурсий, составлением практико-ориентированных задач, решаемых методом математического моделирования посредством дифференциальных уравнений и реализация математических моделей в виде небольших прикладных программ в Matlab.

Использование рабочей тетради открывает новые возможности и способствует активизации мыслительной деятельности старших школьников. Рабочие тетради призваны сыграть важную роль в организации самостоятельной работы обучающихся как на этапе усвоения и закрепления нового материала, так и на этапе повторения пройденного материала. Преимущество использования рабочей тетради состоит ещё и в том, что она позволяет более рационально и экономно использовать учебное время, так как при этом обучающиеся освобождаются, в частности, от необходимости переписывания текста заданий и могут больше внимания уделить именно выполнению предложенных заданий. Выполненные домашние задания обучающиеся отправляют по электронной почте, благодаря чему есть возможность заблаговременно их рассмотреть и на следующем занятии разобрать разнообразные варианты решения и допущенные ошибки[4, с. 3].

Рабочая тетрадь выдается обучающимся заранее, чтоб они могли ознакомиться с их содержанием; в них приведены задания неодинаковой степени сложности для разных групп обучающихся, задания практико-ориентированной направленности; подсказки для решения задач, а также задания, предполагающие использование информационно-коммуникационных технологий, в частности средств программного обеспечения. Эти тетради предназначены как для аудиторной, так и (в большей степени) для самостоятельной работы обучающихся [6, с. 1].

Информационно-коммуникационные технологии могут применяться при изучении практически всех тем по дифференциальным уравнениям, так как эти уравнения описывают многие явления, происходящие в реальном мире, в окружающей нас действительности. Использование информационно-коммуникационных технологий при изучении дифференциальных уравнений позволит повысить интерес обучающихся к данному предмету освоить компьютерные технологии такие как создание публикаций и презентаций.

В качестве примера можно привести задачу о спутниковой тарелке.

Задача. *Какова должна быть форма спутниковой тарелки, чтобы отраженные радиосигналы были параллельны*?

Решение этой задачи сводится к дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными, интегрирование которого приводит к семейству парабол и, как следствие, к выводу о том, что спутниковая тарелка представляет собой параболоид вращения.

Принцип работы параболической антенны можно продемонстрировать как с помощью презентации, так и с помощью видеофильма с популярного сайта Н.Н. Андреева «Математические этюды» [4, с.7].

Понятийные карты предоставляют собой простой способ оценки качества понимания при изучении фундаментальных понятий теории дифференциальных уравнений таких как уравнение разрешенное и не разрешенное относительно производной, общее решение и частное решение, общий интеграл и частный интеграл, интегральная кривая, начальное условие, задача Коши и других. [5, с.123].

Этапы построения понятийной карты на практическом занятии:

На первом этапе, получив задание, обучающиеся вспоминают все, что связано с темой; создают список понятий, записывают их в краткой форме на маленьких записных листиках; обсуждают, насколько важна информация; стараются сделать список с наибольшим возможным количеством понятий.

На втором этапе, раскладывают на столе понятия, записанные на маленьких листиках таким образом, чтобы была возможность прочитать, сформировать группы и подгруппы понятий; расположить группы по иерархии; перестраивать понятия и вводить новые, которые опустили первоначально; обучающиеся отмечают, что ряд понятий неоднократно попадают в группировки.

На третьем этапе, обучающиеся на большом листе бумаги, располагают понятия лучшим образом, отражая тем самым коллективное понимание взаимосвязей между группировками; используют порядок подчиненности, в которой самые важные понятия находятся в центре или наверху; в пределах одной группировки связывают друг с другом понятия, объединяют их в простом предложении.

На четвертом этапе, используют линии со стрелками для соединения и показа отношений между связанными понятиями.

На пятом этапе, по окончании работы, понятийной карте придают окончательную форму; обучающиеся из других групп знакомятся и вносят предложения, если в этом есть необходимость; используют различные цвета, шрифты, формы и толщину линий; даюте понятийной карте название; для создания окончательного варианта понятийной карты или блок-схемы на компьютере обучающиеся используют программу PowerPoint. [3, с.43].

Предварительно к разработке понятийных карт должны быть отобраны наиболее употребляемые понятия, связанные с темой предмета [1, с.69]. Например понятийная карта представленная на рис 1.

Рис. 1. Понятийная карта по теме
«Основные понятия теории дифференциальных уравнений»

Проведение лабораторных и практических работ со старшеклассниками вносит разнообразие в занятия математики; повышает активность и самостоятельность старшеклассников на занятии; способствуют повышению уровня знаний старшеклассников по математике; делает абстрактные теоретические положения понятными, доступными, наглядными.

К лабораторно-практическим работам относим самостоятельные работы учащихся, выполняемые посредством наблюдений, сравнений, измерительных и вычислительных инструментов, составления таблиц, вычерчивания графиков, исследования математических формул, чертежей, фигур, с целью установления новых для учащихся математических фактов, являющихся основой для теоретических выводов и обобщений, и, впоследствии, получающее, по необходимости, строгое логическое доказательство».

Примером лабораторно-практической работы может служить задание: опытным путем получить зависимость укорочения мышцы руки при поднятии тяжестей, – приводящее к дифференциальному уравнению.

При освоении элементов теории дифференциальных уравнений предусмотрены экскурсии на производство. Очевидно, что дать обучающимся полное представление о современном производстве, для работы на котором они подготавливаются, без его посещения невозможно. Многие вопросы могут быть освещены в понятной для обучающихся, наглядной форме только при непосредственном ознакомлении с определенными предметами в их естественной среде. Поэтому экскурсии — достаточно эффективный способ приобщения учащихся к современной технике, технологии и организации производства непосредственно в условиях предприятия. Таким образом, экскурсии являются одним из видов организованных наблюдений за производственными процессами или объектами под руководством мастера на ферме, в индивидуальном хозяйстве, на стройке и т. д., т. е. в условиях реального производства. Чаще всего экскурсии проводятся с целью сбора данных для составления задачи, источником для сюжета и числовых данных которой является экскурсионный объект.

Многие прикладные задачи сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем таких уравнений. Для некоторых ОДУ можно построить формулы «точного» решения, например, для уравнений и систем с постоянными коэффициентами. Элементы символьной математики, встроенные в MATLAB, позволяют находить аналитический вид решений таких уравнений. Но и для них, если функции внешних воздействий сложны (разрывные, ломанные или неинтегрируемые функции) построение «аналитических» решений затруднительно. Поэтому использование приближенных методов крайне важно и в MatLab реализовано большое количество численных алгоритмов решения ОДУ [2, с.1].

К началу решения дифференциальных уравнений с помощью среды программирования Matlab обучающимся необходимы знания основ математического моделирования, дифференциальных уравнений, программирования, английского языка.

Обучающихся знакомим с примерами применения решения дифференциальных уравнений с помощью среды программирования Matlab.

Пример 1. Рассмотрим двухвидовую модель «хищник — жертва», впервые построенную в первой половине XX в. итальянским математиком Вольтерра для объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море. Имеются два биологических вида, численностью в момент времени t, соответственно, $x(t)$ и $y(t)$. Особи первого вида являются пищей для особей второго вида (хищников). Численности популяций в начальный момент времени известны. Требуется определить численность видов в произвольный момент времени. Математической моделью задачи является система дифференциальных уравнений Лотки Вольтерра

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by) \cdot x \\ \frac{dy}{dt} = (-c + dx) \cdot y \end{cases};$$ где a, b, c, d положительные константы.

Проведем расчет численности популяций, если $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 1$, для двух вариантов начальных условий $x(0) = 2$, $y(0) = 1$ и $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, для которых построим фазовые траектории.

Весь код решения соберем в одну функцию function odeLotVolt

```
% решение системы уравнений Лотки – Вольтерра
Y0=[2; 1];                          % вектор начальных условий
[T,Y]=ode45(@fun,[0 7],Y0);         % решаем систему
plot(Y(:,1),Y(:,2));                % фазовая траектория
grid on; hold on;
Y0=[1; 2];                          % вектор начальных условий
[T,Y]=ode45(@fun,[0 7],Y0);         % решаем систему
plot(Y(:,1),Y(:,2));                % фазовая траектория
function F=fun(x,y)                 % подфункция правой части системы
F=[3*y(1).*(1-y(2)); y(2).*(y(1)-1)];
```

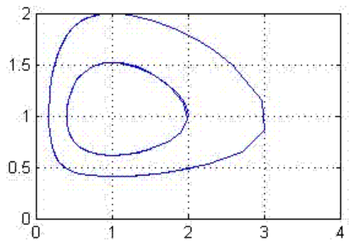

Рис. 1.1.

Из этого рисунка (рис. 1.1.) видно, что численность популяций меняется периодически [2, с. 25].

Пример 2. Исследуем поведения математического маятника. Пусть масса груза равна единице, а стержень, на котором подвешена масса, невесом. Тогда дифференциальное уравнение движения груза имеет вид

$$\varphi'' + k\varphi' + \omega^2 sin\varphi = 0$$

Где $\varphi(t)$ угол отклонения маятника от положения равновесия (нижнее положение), параметр k характеризует величину трения $\omega^2 = g/l$, (g ускорение свободного падения, l – длина маятника). Для определения конкретного движения к уравнению движения надо добавить начальные условия $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi'(0) = \varphi_0'$.

Преобразуем уравнение к системе ОДУ 1 – го порядка. Если обозначить $u \equiv \varphi$, $v \equiv \varphi'$, то получим

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -k \cdot v - \omega^2 \sin(u) \end{cases}; \quad u(0) = \varphi_0, \ v(0) = \varphi_0'$$

Выберем следующие значения параметров $k = 0.5, \omega^2 = 10$ и начальные значения $\varphi_0 = 0$, $\varphi_0' = 5$.

Создаем функцию

```
pend=@(t,y) [y(2); -0.5*y(2)-10*sin(y(1))];
```

Решаем систему и строим график (рис. 2.1. слева)

```
[T,Y]=ode45(pend,[0:0.01:20],[0 5]);
plot(T,Y(:,1)); grid on;
```

Строим фазовую траекторию (рис. 2.1. справа)

```
plot(Y(:, 1),Y(:,2)); grid on;
```

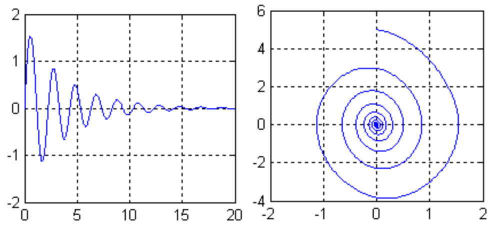

Рис. 2.1.

Как видно из левого графика максимальный угол отклонения маятника не превышают π/2 и колебания маятника затухают.

Увеличим начальную скорость до 10. Решаем задачу и строим график решения (рис. 2.2. слева)

```
[T,Y]=ode45(pend,[0:0.01:20],[0 10]);
plot(T,Y(:,1)); grid on;
```

Строим фазовую траекторию (рис. 2.2. справа)

```
plot(Y(:, 1),Y(:,2)); grid on;
```

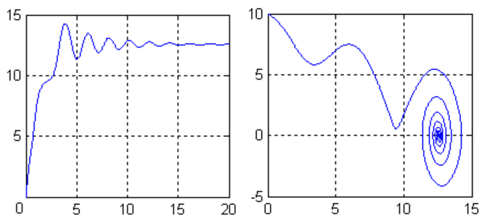

Рис. 2.2.

Максимальное значение угла составляет примерно 14 радиан. Маятник сделал два полных оборота вокруг точки закрепления (угол отклонения увеличился на 4π), а затем колебания затухают в окрестности значения 4π радиан (для маятника угол поворота 4π представляет то же, что и 0 радиан, т.е. положение равновесия).

Построим несколько графиков угла отклонения (рис. 2.3. слева) и фазовых траекторий (2.3. рис. справа), задавая различную начальную скорость.

```
clf; hold on;                      % графики угла отклонения
for v=5:10
   [T,Y]=ode45(pend,[0:0.01:20],[0 v]);
   plot(T,Y(:,1)); grid on;
end;
pause;                      % ждет нажатия любой клавиши
clf; hold on;                      % фазовые траектории
for v=5:10
   [T,Y]=ode45(pend,[0:0.01:20],[0 v]);
   plot(Y(:, 1),Y(:,2)); grid on;
end;
```

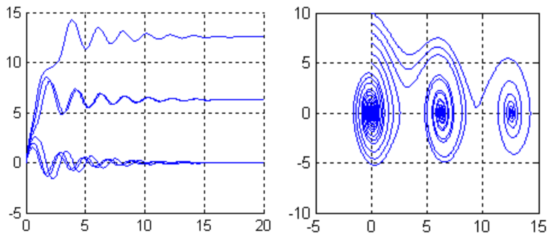

Рис. 2.3.

Как видим, начальная скорость при *v=5, 6, 7* недостаточна, чтобы маятник прошел верхнюю точку и сделал хотя бы один полный оборот. При начальной скорости *v= 8, 9* маятник совершает один полный оборот, а затем его колебания затухаю. При *v=10* маятник смог выполнить два полных оборота и только после этого его колебания стали затухать вокруг положения равновесия [2, с. 26-28].

С обучающимися можно рассмотреть ряд задач, решаемых с помощью пакета MATLAB из пособия П.Г. Доля [2, с. 19-52].

Практико-ориентированные задачи, решаемые с помощью дифференциальных уравнений, являются и средством подготовки обучающихся к выбору профессии. Предложенная методика обучения старшеклассников элементам теории дифференциальных уравнений на основе практико-ориентированного подхода с применением метода математического моделирования (исследование задач с заданными моделями, составление задач по известным моделям, задачи на составление математических моделей, решение моделей с помощью компьютерных программ и аналитических методов) в системе дополнительного образования, состоящая в решении практико-ориентированных задач, использовании понятийных карт как средства достижения целостности знаний учащихся, применении рабочих тетрадей с целью формирования глубоких и прочных осознанных знаний обучающихся, проведении лабораторно-практических работ, осуществляющих связь теории с жизнью, организации экскурсий на производства для наглядной убежденности школьников в том, что изучение теории ведет к богатым и разнообразным приложениям.

Литература

1. Аммосова Н.В., Зелинская Г.А. Понятийные карты как средство понимания учебных материалов в вузе / Н.В. Аммосова, Г.А. Зелинская // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова. – 2006. – Т. 15 – №4 – С. 67–75.

2. Доля П.Г. Использование MATLAB. Решение дифференциальных уравнений

[Электронный ресурс] / П.Г. Доля – Режим доступа: http://docplayer.ru/34139081-Ispolzovanie-matlab-reshenie-differencialnyh-uravneniy.html#show_full_text

3. Зелинская Г.А., Зелинский М.М. Структурирование учебных материалов на основе понятийных карт / Г.А. Зелинская, М.М. Зелинский // Известия Волгоградского государственного технического университета: межвуз. сб. науч. ст. – Волгоград, 2008. - № 5 (43). – С. 43–46.

4. Лобанова Н.И. Применение рабочих тетрадей при оценивании качества знаний обучающихся по дифференциальным уравнениям в рамках системы дополнительного образования / Н.И. Лобанова // Интернет-журнал «Мир науки» 2017. – Т. 5. – № 4. – С. 1–8.

5. Лобанова Н.И. Использование понятийных карт при изучении элементов теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования / Н.И. Лобанова // Вестник КГУ Серия Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2018. – № 1. – С. 123–129. крана. Яз. Рус., англ.

6. Марченко Т. Н. Современные вопросы математического образования студентов технических университетов [Электронный ресурс] / Т. Н. Марченко – Режим доступа: irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?...2...1...

7. Мышкис А. Д. О преподавании математики прикладникам / А. Д. Мышкис // Математика в высшем образовании. – Нижний Новгород, 2003. – № 1. – С. 37–52.